

6. ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DE SEÑALES DISCRETAS.

6.1 Muestreo de señales.

El muestreo de señales es una operación matemática sencilla que implica efectos interesantes para el análisis espectral. Si bien a primera vista parece algo trivial el muestreo de una señal, tomar una lectura a cada determinado intervalo de muestreo T de un sistema físico, existen consecuencias matemáticas que se deben estudiar.

La digitización o discretización de una señal $h(t)$ (figura 5.6a) se realiza multiplicando ésta por un tren de impulsos unitarios $d_k(t)$ (figura 5.6b) de período T , en donde este último valor ahora se llamará intervalo de muestreo. La consecuencia de muestrear a este intervalo se observa en el dominio de las frecuencias, pues por el Teorema de Convención sabemos que la transformada de $h(t)$, $H(f)$ (figura 5.6c) va a ser convolucionada por una función $\Delta_k(f)$ (figura 5.6d) que es la transformada de $d_k(t)$, que produce que $H(f)$ se describa sobre cada impulso de $\Delta_k(f)$ convirtiéndose en una función periódica en el dominio de las frecuencias.

En el caso ideal de que $H(f)$ sea de banda limitada, esto es que $H(f) \neq 0$ para $|f| < f_c$, si el intervalo de muestreo $T = 1/2f_c$ debido a las propiedades de la transformada de $d_k(t)$ se observa que en la operación $H(f) * \Delta_k(f)$ (figura 5.6f) en valores de f_c comienza una $H(f)$ que es parte de la periodicidad.

Si supusiéramos que $T > 1/2f_c$ observaríamos en $H(f) * \Delta_k(f)$ que va a existir una superposición $H(f)$ en las vecindades de un valor $f = 1/2T$, superposición llamada fenómeno de Aliasing (figura 5.4f). Por el contrario si $T < 1/2f_c$ se observaría una zona de separación en $H(f) * \Delta_k(f)$ para cada descripción de $H(f)$ (figura 5.3f).

Esto significa que de acuerdo al valor de T usado para el muestreo de una señal se va a describir un espectro diferente, en donde se debe de tomar en cuenta que el muestreo de $h(t)$ no es suficiente para que su transformada de Fourier sea también discreta, sino que solo es un espectro continuo y periódico.

El problema en la realidad estriba en que las señales que nosotros estudiamos de un sistema físico no tienen un espectro de banda limitada, entonces nunca vamos a poder tener casos similares descritos en las figuras 5.6 y 5.3. Debido a esto deberemos minimizar en lo posible el fenómeno de Aliasing de acuerdo a la frecuencia de bandas de interés y a las posibilidades de escoger un intervalo de muestreo adecuado; esto observando que la banda de frecuencias es limitada en el intervalo de $[-f_N, f_N]$ (llamando f_N frecuencia de Nyquist) en donde $f_N = 1/2T$, entonces para procurar contemplar a este rango de frecuencias se deberá usar un valor de $T \leq 1/2f_N$.

Matemáticamente el muestreo de una función se representa como

$$h(t) \cdot d_k(t) = h(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) d(t - kT) = \hat{h}(t) \quad (6.1)$$

para el tiempo y suponiendo que para $h(t) \Leftrightarrow H(f)$ y $d_k(t) \Leftrightarrow \Delta_k(f)$ entonces en las frecuencias

$$H(f) * \Delta_k(f) = H(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0 d(f - nf_0) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - nf_0) = \hat{H}(f) \quad (6.2)$$

que es una función periódica cada $f_0 = 1/T$.

6.2 Teorema del Muestreo

Si la $\mathfrak{S}\{h(t)\}$ es de banda limitada, es decir

$$H(f) = \begin{cases} \neq 0; |f| < f_c \\ 0; |f| > f_c \end{cases} \quad (6.3)$$

función $h(t)$ continua y muestreada usando $T = 1/2f_c$, entonces esta función puede ser reconstruida a partir de sus valores muestreados $h(kT)$ por

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(kT) \frac{\text{sen } 2\pi f_c (t - nT)}{2\pi f_c (t - nT)} \quad (6.4).$$

Esto se deriva a partir de la expresión (6.2) (figura 5.7a) al multiplicarla por la función cajón $Q(f) = T; |f| < f_c$ (figura 5.7 b) para poder aislar el espectro $H(f)$ entre $[-f_c, f_c]$ y hacer la transformada inversa para reconstruir $h(t)$ (figura 5.7c). Matemáticamente multiplicar $[H(f) * \Delta_k(f)] \cdot Q(f)$ (figura 5.7e), en el dominio del tiempo se desarrolla la convolución entre $[h(t) \cdot d_k(t)] * q(t)$ donde esta última es una función tipo sampling. Esto es

$$\begin{aligned} h(t) &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) d_k(t - kT) \right] * \frac{\text{sen } 2\pi f_c t}{2\pi f_c t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) \left[d(t - rT) * \frac{\text{sen } 2\pi f_c t}{2\pi f_c t} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) \frac{\text{sen } 2\pi f_c t}{2\pi f_c t} \end{aligned} \quad (6.5).$$

6.3 Transformada Discreta de Fourier

Una señal se puede expresar en términos de sus espectros de amplitud y fase. Estos espectros representan dos características de una señal, donde el primero muestra la contribución de las diferentes componentes de la señal en términos de sus zonas de influencia en el dominio de las frecuencias; el segundo mostrará la posición de esas contribuciones.

El caso discreto se tiene que estos dos elementos de análisis se encontrarán limitados a una banda $[-f_N, f_N]$ impuesta por el intervalo de muestreo.

6.3.1 Desarrollo Gráfico

Considerando el par transformado $h(t) \Leftrightarrow H(f)$ (figura 6.1a) la determinación de la transformada digital o discreta hace necesario el muestreo de $h(t)$ como se describió en la sección 6.1. El muestreo se realiza entonces multiplicando por una función $d_k(t)$ (figura 6.1b), el par transformado resultante

$h(t) \cdot d_k(t) \Leftrightarrow H(f) * \Delta_k(f)$ (figura 6.1c) es la primera modificación al par original que aún no representa un par completamente digital y que presenta el fenómeno de Aliasing como consecuencia del muestreo. Para este par también existe la limitación de que el dominio de tiempo no puede ser operado digitalmente pues el número de muestras considerado en t es infinito, así se hace necesario truncarlas a un número finito N . El truncamiento se lleva a cabo con la función rectangular o cajón $x(t)$ (figura 6.1d) que da origen a una $h(t)$ con N muestras (figura 6.1e) que introduce la segunda modificación en forma de rizados a la transformación, conocida como fenómeno de Gibbs, consecuencia de la convolución entre $X(f)$ que es una función sampling $\frac{\text{sen}(f)}{f}$ con $H(f) * \Delta_k(f)$.

El último paso para obtener señales digitales en ambos dominios es el muestreo de $H(f) * \Delta_k(f) * X(f)$ con una función $d_n(f)$ de intervalo definido como $1/T_0$ para asegurar correspondencia a la extensión de $x(t)$ y por lo tanto a un número de muestras N (figura 6.1f). El resultado será un par transformado digital aproximado con muestras N y periódico en ambos dominios consecuencia de los muestreos tanto en el tiempo como en las frecuencias (figura 6.1g).

Para observar el comportamiento del fenómeno de Aliasing en un espectro digital producido por el muestreo podemos estudiar la figura 9.3 donde se describe para una función dada, diferentes intervalos de muestreo T y su transformada discreta. Es evidente que el fenómeno de Aliasing se minimiza conforme el valor de T va disminuyendo.

6.3.2 Desarrollo Teórico

De acuerdo al desarrollo gráfico, éste se puede expresar matemáticamente para obtener una expresión de la transformada de Fourier discreta. Considerando el par de la figura 6.1a, se discretiza como

$$h(t) \cdot d_k(t) = h(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) d(t - kT) = \hat{h}(t) \quad (6.6)$$

representado en la figura 6.1c. A continuación se trunca con $x(t)$ de extensión $T_0 = NT$

$$h(t) \cdot d_k(t) \cdot x(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) d(t - kT) \right] \cdot x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) d(t - kT) \quad (6.7)$$

resultado ilustrado en la figura 6.1e.

La modificación final se efectúa con la convolución con

$$\Delta_r(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} d(t - rT_0) \quad (6.8)$$

quedando

$$\begin{aligned} [h(t) \cdot d_k(t) \cdot x(t)] * \Delta_r(t) &= \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT) d(t - kT) \right] * \left[T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} d(t - rT_0) \right] \\ &= T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) d(t - kT - rT_0) \end{aligned} \quad (6.9).$$

Esta última expresión implica tanto la periodicidad de las N muestras con el índice r , como el muestreo con el índice k .

El desarrollo de la transformada de Fourier de (6.9) debe hacerse a partir de la serie de Fourier de la función periódica $h(t)$ con la suposición de que

$$H\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n d(f - nf_0) \text{ con } f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (6.10)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0 - T/2} \hat{h}(t) e^{\frac{-i2\pi nt}{T_0}} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.11)$$

sustituyendo (6.9) en (6.11) se tiene

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0 - T/2} T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) d(t - kT - rT_0) e^{\frac{-i2\pi nt}{T_0}} dt$$

observando que la integración es solo en un período

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-T/2}^{T_0 - T/2} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) d(t - kT) e^{\frac{-i2\pi nt}{T_0}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \int_{-T/2}^{T_0 - T/2} d(t - kT) e^{\frac{-i2\pi nt}{T_0}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{\frac{-i2\pi knT}{T_0}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

y como $T_0 = NT$ (6.12) se puede re-escribir como

$$a_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{\frac{-i2\pi kn}{N}}$$

convirtiéndose (6.10) en

$$H\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{\frac{-i2\pi kn}{N}} d(f - nf_0) \quad (6.13)$$

donde se puede demostrar que $H\left(\frac{r}{NT}\right) = H\left(r + \frac{N}{NT}\right)$ quedando la ecuación (6.13) como

$$H\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{\frac{-i2\pi kn}{N}}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.14)$$

que es llamada Transformada Discreta de Fourier.

De forma análoga la expresión para la transformada inversa está dada por

$$g(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT}\right) e^{\frac{i2\pi nk}{N}}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.15).$$

La relación que existe entre la transformada discreta y la continua es dada por

$$H(f) = T \cdot H\left(\frac{n}{NT}\right) \quad (6.16).$$

6.4 Propiedades

Las propiedades de la transformada de Fourier continua pueden ser extensivas para la forma discreta. Es así que se pueden tener los equivalentes expresados en la tabla 6.1.

Por otro lado es importante analizar la entrada y salida de datos en la expresión (6.14). Análisis que se puede comprender al observar la figura 9 donde se compara una transformada continua y una inversa para una expresión conocida. Se puede observar que el comportamiento de la transformada discreta en su parte real (figura 9b) como imaginaria (figura 9c) se describe primero de las muestras 0 a $\frac{N}{2}$ y luego de $\frac{N}{2} + 1$ a

$N-1$ como equivalentes a frecuencias de $[0, f_N]$ y de $(-f_N, 0)$ respectivamente para el caso continuo. Es así pues que es necesario considerar este fenómeno para re-arreglar el espectro discreto si se requiere o para la operación digital en el dominio de las frecuencias. Además se debe notar el efecto del muestreo y el truncamiento en los fenómenos asociados de Aliasing y Gibbs.

De igual forma en la figura 9.17 se observa en caso inverso en donde con valores de una expresión $H(f)$ se opera una transformada discreta inversa (6.16) donde el resultado del primer valor es para $t=0$ además de la dispersión de valores provocado por el Aliasing y Gibbs (figura 9.17c).

6.5 Transformada Discreta Bidimensional de Fourier

A partir de la expresión bidimensional continua para la transformada de Fourier

$$H(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-i2\pi(px+qy)} dx dy \quad (6.17)$$

y su inversa

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(p, q) e^{i2\pi(px+qy)} dp dq \quad (6.18)$$

se pueden determinar las formas discretas como

$$H\left(\frac{n}{NT_x}, \frac{m}{MT_y}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} h(kT_x, lT_y) e^{-i2\pi\left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M}\right)}, \quad (6.19)$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$ y $m = 0, 1, \dots, M-1$

y

$$g(kT_x, lT_y) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} G\left(\frac{n}{NT_x}, \frac{m}{MT_y}\right) e^{i2p\left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M}\right)}, \quad (6.20)$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$ y $l = 0, 1, \dots, M-1$

expresiones que pueden aplicarse fácilmente a partir de (6.14) y (6.15) respectivamente.

Si transformamos primero en una dirección

$$Z\left(\frac{n}{NT_x}, lT_y\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT_x, lT_y) e^{-i2p\frac{kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.21)$$

y luego en la otra

$$H\left(\frac{n}{NT_x}, \frac{m}{MT_y}\right) = \sum_{l=0}^{M-1} Z\left(\frac{n}{NT_x}, lT_y\right) e^{-i2p\frac{lm}{M}}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (6.22)$$

es fácil aplicar solo un algoritmo numérico de una dimensión dos veces para obtener una transformada bidimensional.

Esta expresiones presentarán también salidas y entradas de datos similares a los de la expresión (6.14). La figura 11.5 es una representación gráfica del resultado de (6.19) para $N=M=8$ y como debe de representarse correctamente.

Bibliografía:

Brigham O., *The Fast Fourier Transform and Its Applications*. Prentice Hall, 1988.

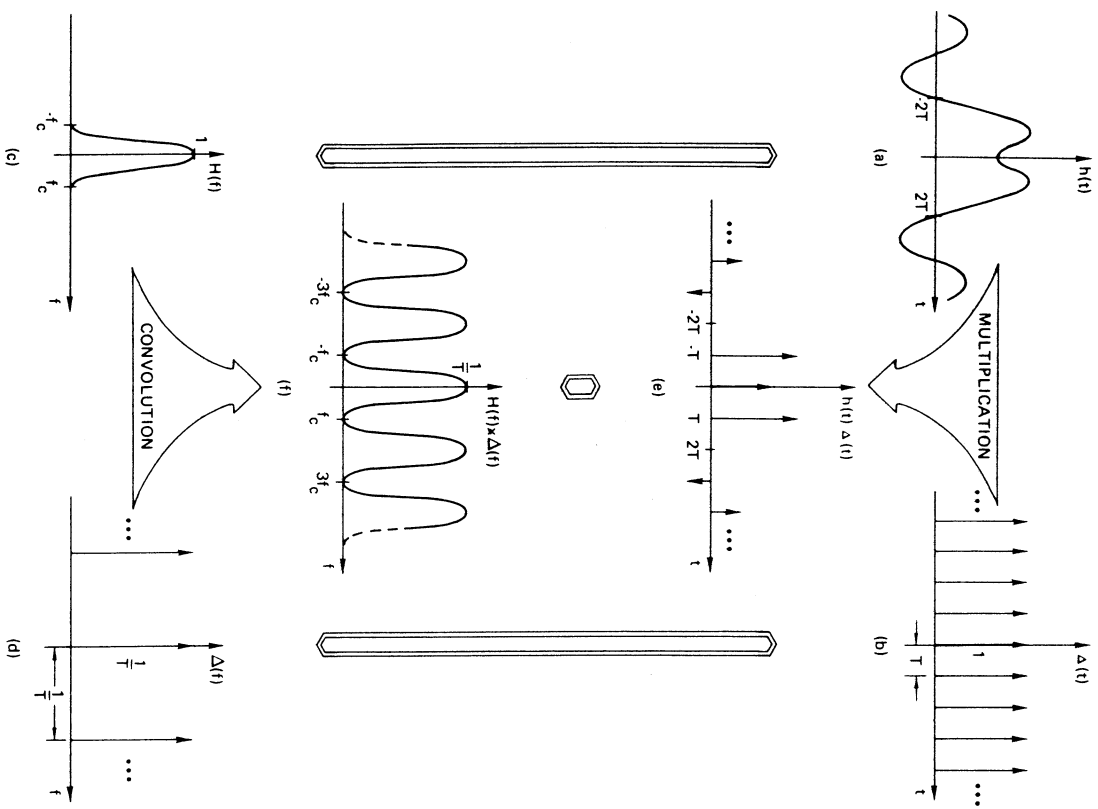


Figure 5.6 Fourier transform of a waveform sampled at the Nyquist sampling rate.

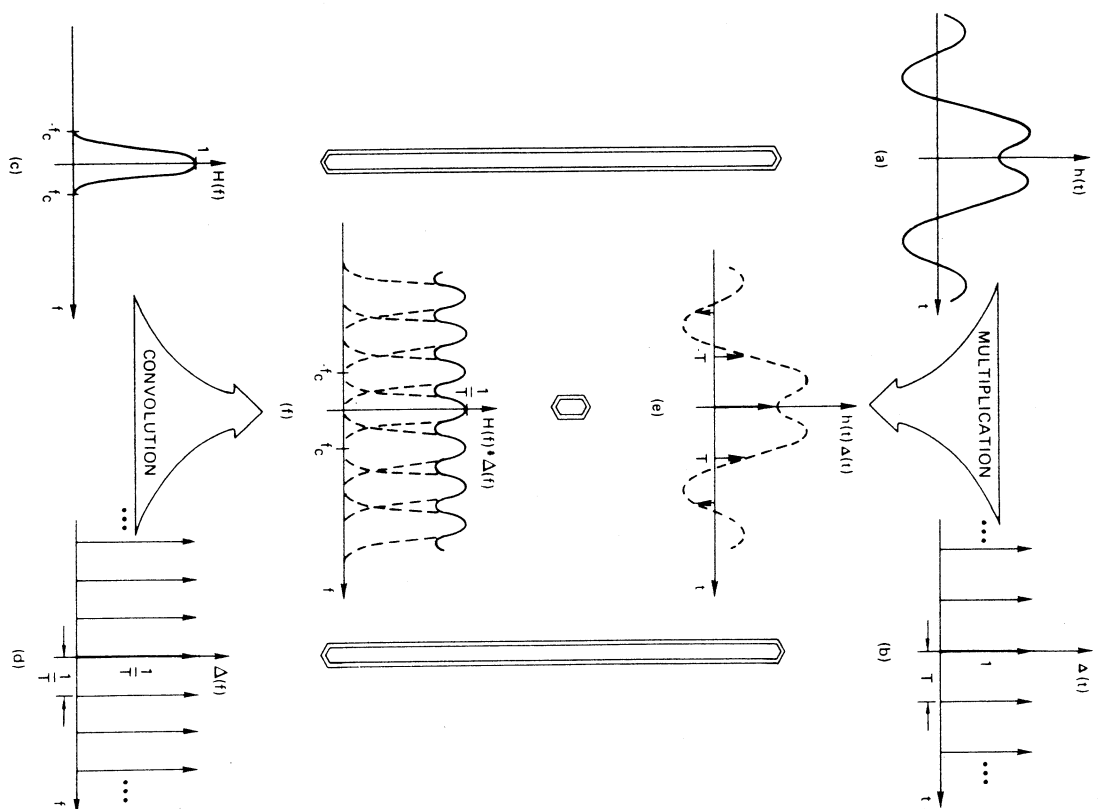


Figure 5.4 Aliased Fourier transform of a waveform sampled at an insufficient rate.

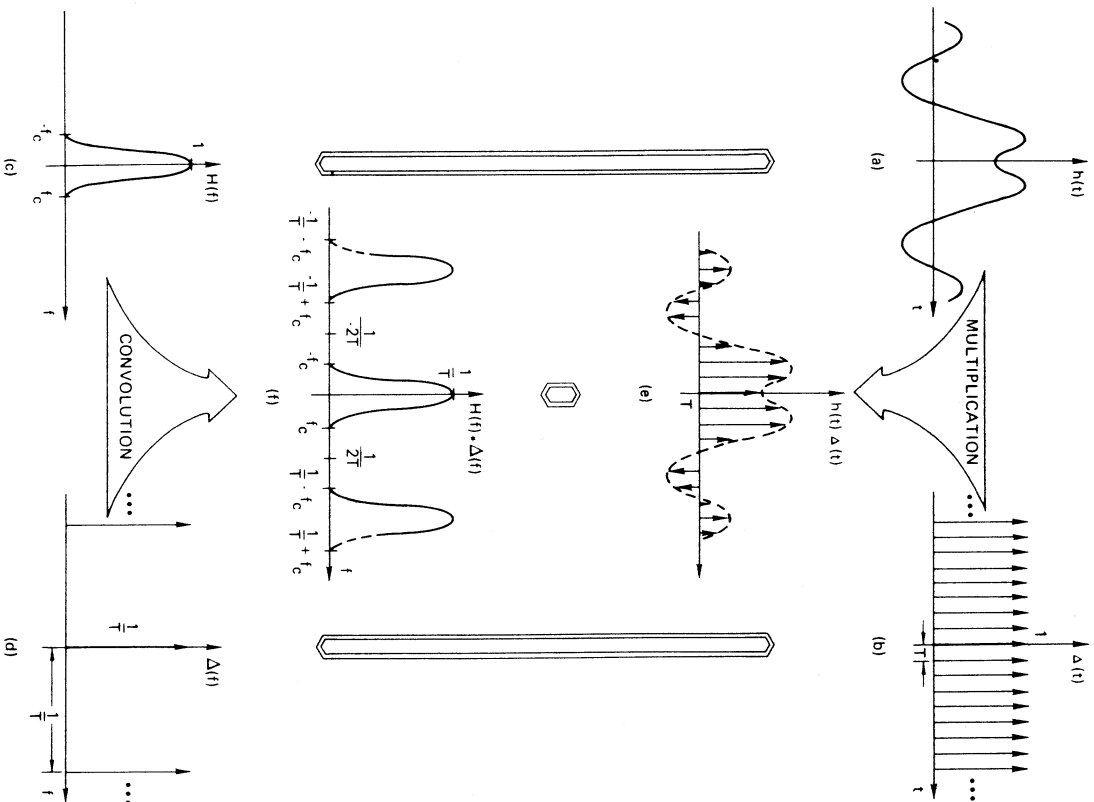


Figure 5.3 Graphical frequency-convolution theorem development of the Fourier transform of a sampled waveform.

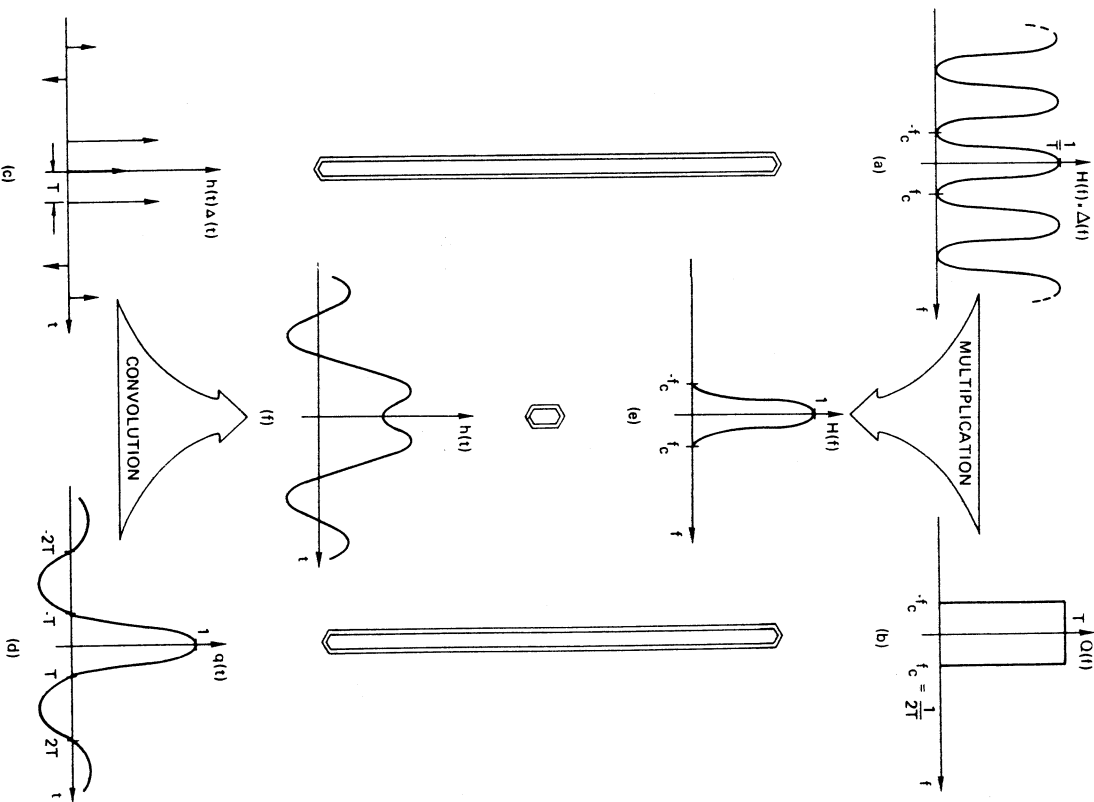


Figure 5.7 Graphical derivation of the sampling theorem.

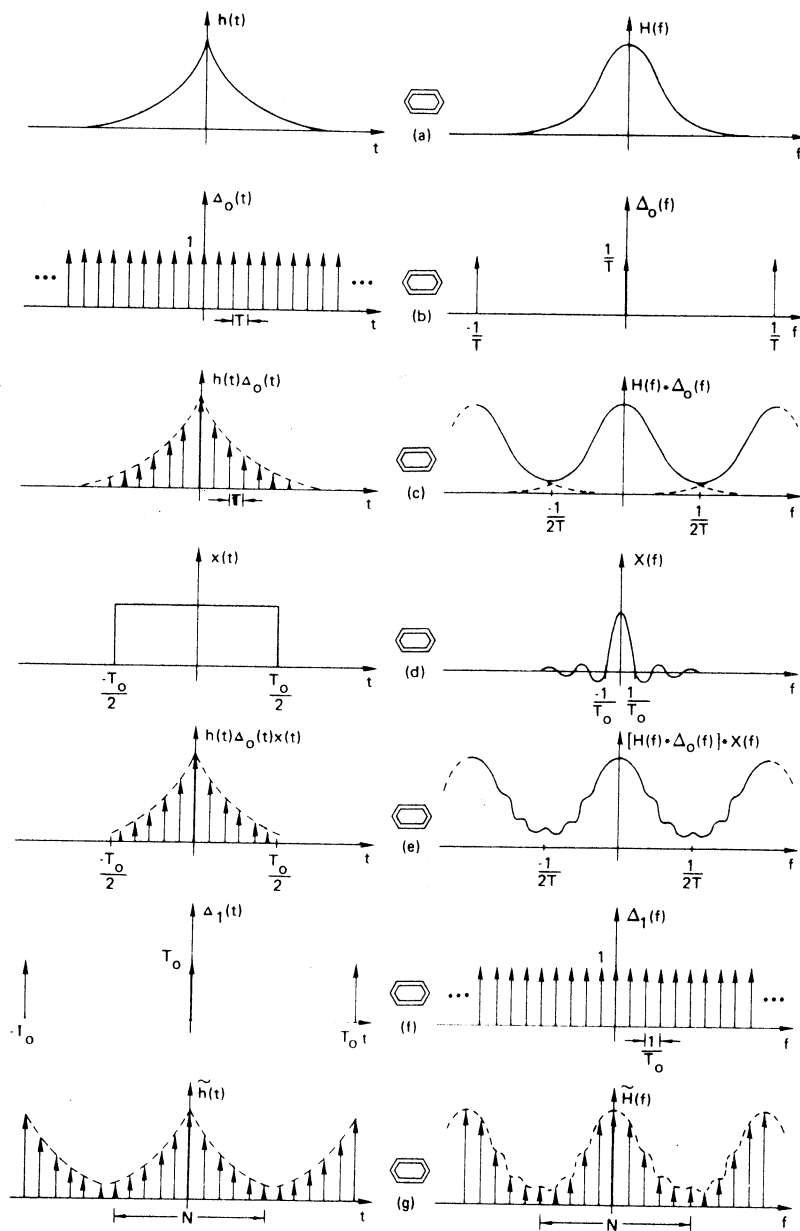


Figure 6.1 Graphical development of the discrete Fourier transform.

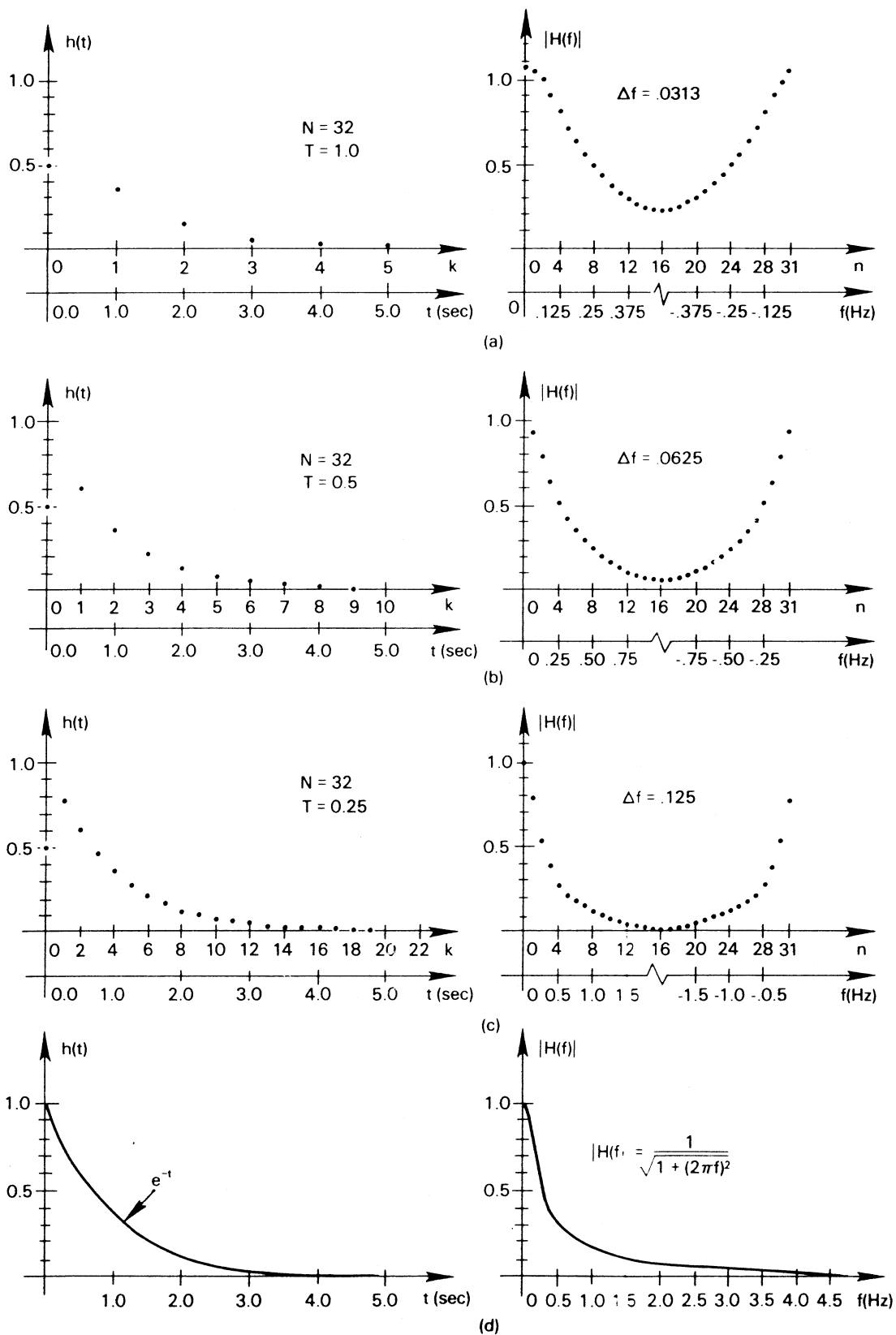


Figure 9.3 Illustration of frequency-domain aliasing as a function of sampling rate.

TABLE 6.1 Continuous and Discrete Fourier Transform Properties

Fourier Transform	Property	Discrete Fourier Transform
$x(t) + y(t) \Leftrightarrow X(f) + Y(f)$	(3.2) Linearity	(6.25) $x(k) + y(k) \Leftrightarrow X(n) + Y(n)$
$H(t) \Leftrightarrow h(-f)$	(3.6) Symmetry	(6.26) $\frac{1}{N}H(k) \Leftrightarrow h(-n)$
$h(t - t_0) \Leftrightarrow H(f)e^{-j2\pi ft_0}$	(3.21) Time shifting	(6.29) $h(k - i) \Leftrightarrow H(n)e^{-j2\pi ni/N}$
$h(t)e^{j2\pi ft_0} \Leftrightarrow H(f - f_0)$	(3.23) Frequency shifting	(6.31) $h(k)e^{j2\pi ki/N} \Leftrightarrow H(n - i)$
$\left[\int_{-\infty}^{\infty} H^*(f)e^{-j2\pi ft} df \right]^*$	(3.25) Alternate inversion formula	(6.33) $\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H^*(n)e^{-j2\pi kn/N} \right]^*$
$h_e(t) \Leftrightarrow R_e(f)$	(3.27) Even functions	(6.35) $h_e(k) \Leftrightarrow R_e(n)$
$h_o(t) \Leftrightarrow jI_o(f)$	(3.32) Odd functions	(6.38) $h_o(k) \Leftrightarrow jI_o(n)$
$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$	(3.33) Decomposition	(6.39) $h(k) = h_e(k) + h_o(k)$
$= \left[\frac{h(t)}{2} + \frac{h(-t)}{2} \right]$		$= \left[\frac{h(k)}{2} + \frac{h(N-k)}{2} \right]$
$+ \left[\frac{h(t)}{2} - \frac{h(-t)}{2} \right]$		$+ \left[\frac{h(k)}{2} - \frac{h(N-k)}{2} \right]$
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$	(4.1) Convolution	(6.49) $y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(k - i) = x(k) * h(k)$
$= x(t) * h(t)$		
$y(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(f)H(f)$	(4.14) Time convolution theorem	(6.50) $y(k) * h(k) \Leftrightarrow Y(n)H(n)$
$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t + \tau) d\tau$	(4.21) Correlation	(6.57) $y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(k + i)$
$y(t)h(t) \Leftrightarrow Y(f) * H(f)$	(4.20) Frequency convolution theorem	(6.56) $y(k)h(k) \Leftrightarrow \frac{1}{N}Y(n) * H(n)$
$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) ^2 df$	Parseval's Theorem	$\sum_{k=0}^{N-1} h^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) ^2$

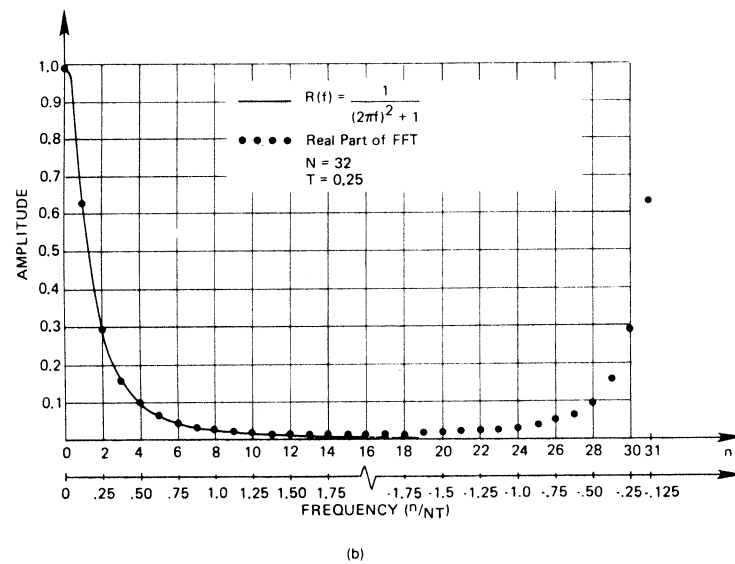
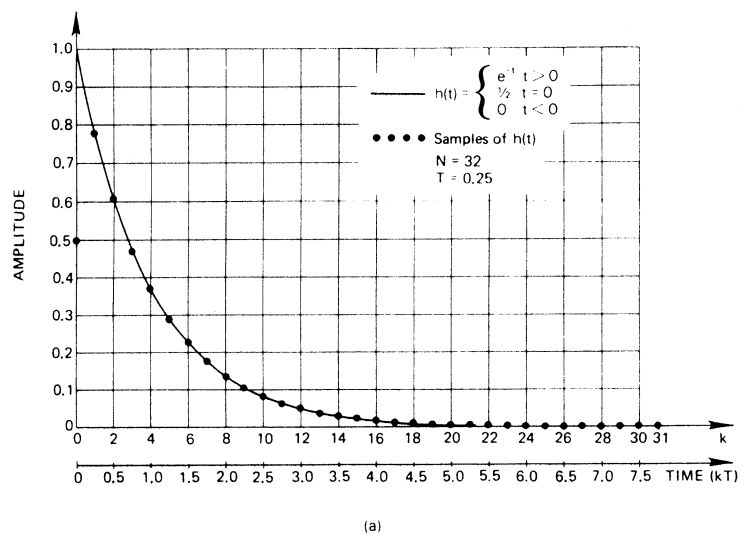


Figure 9.1 Example of Fourier transform computation via the FFT.

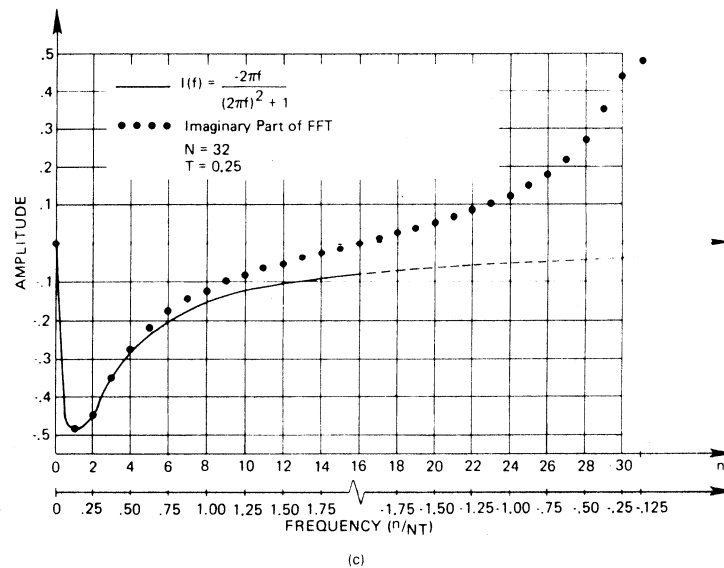


Figure 9.1 (cont.)

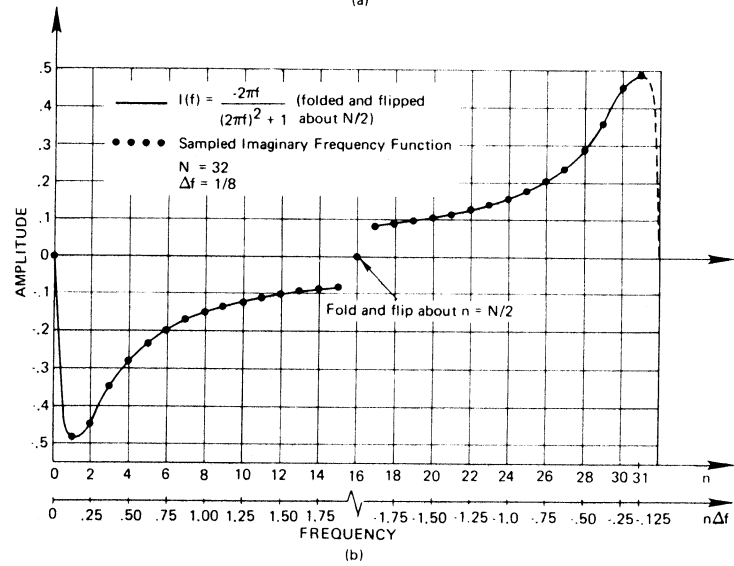
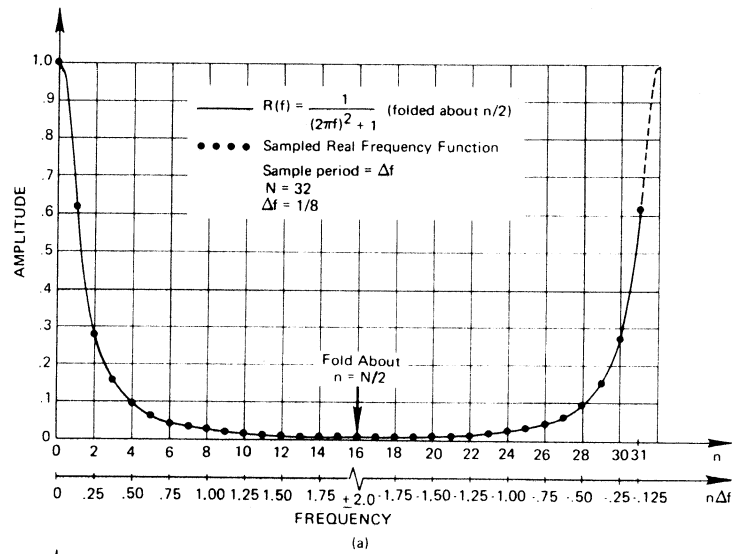


Figure 9.17 Example of the inverse Fourier transform computation via the FFT.

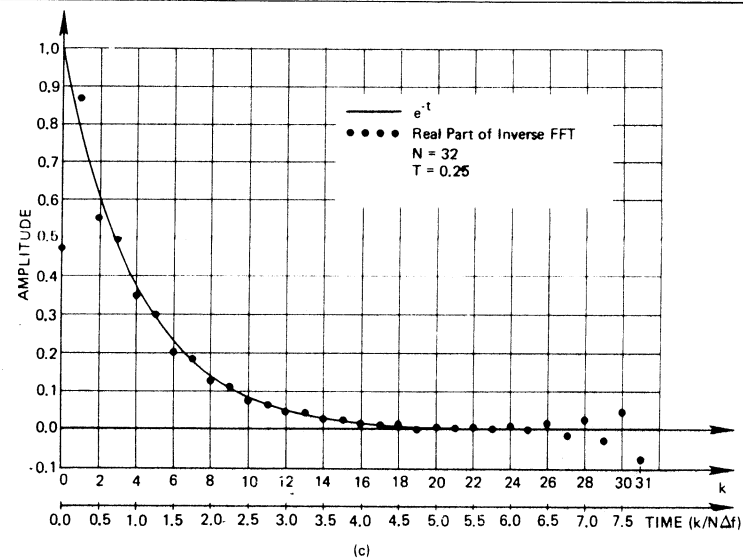
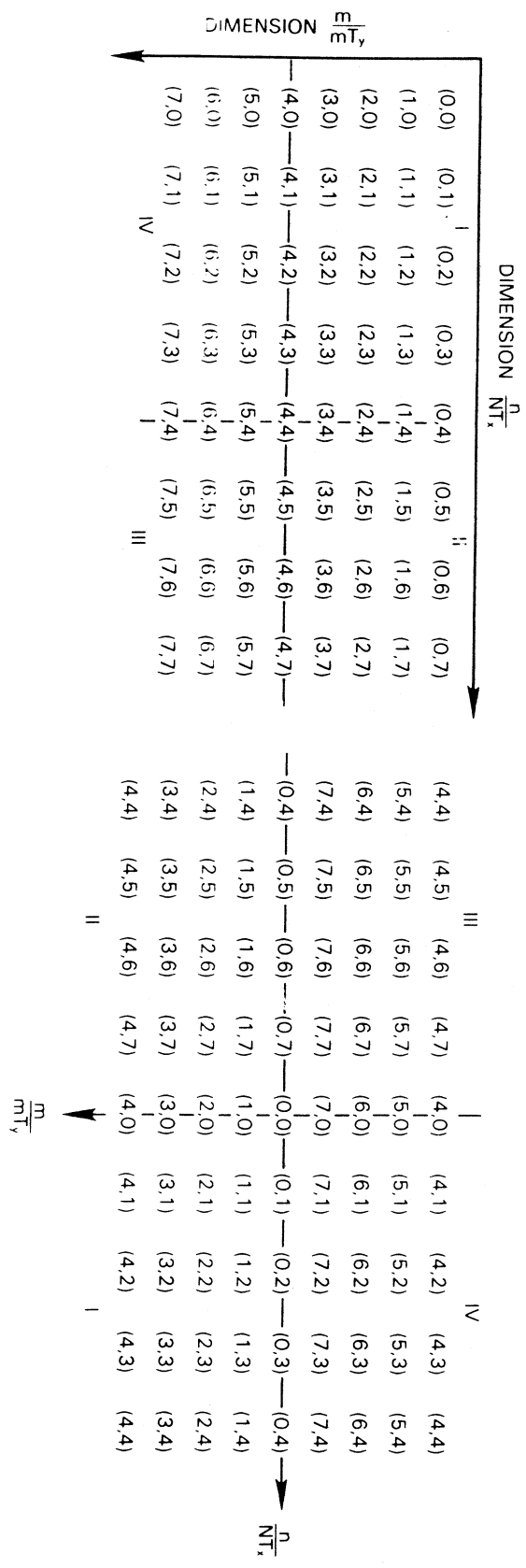
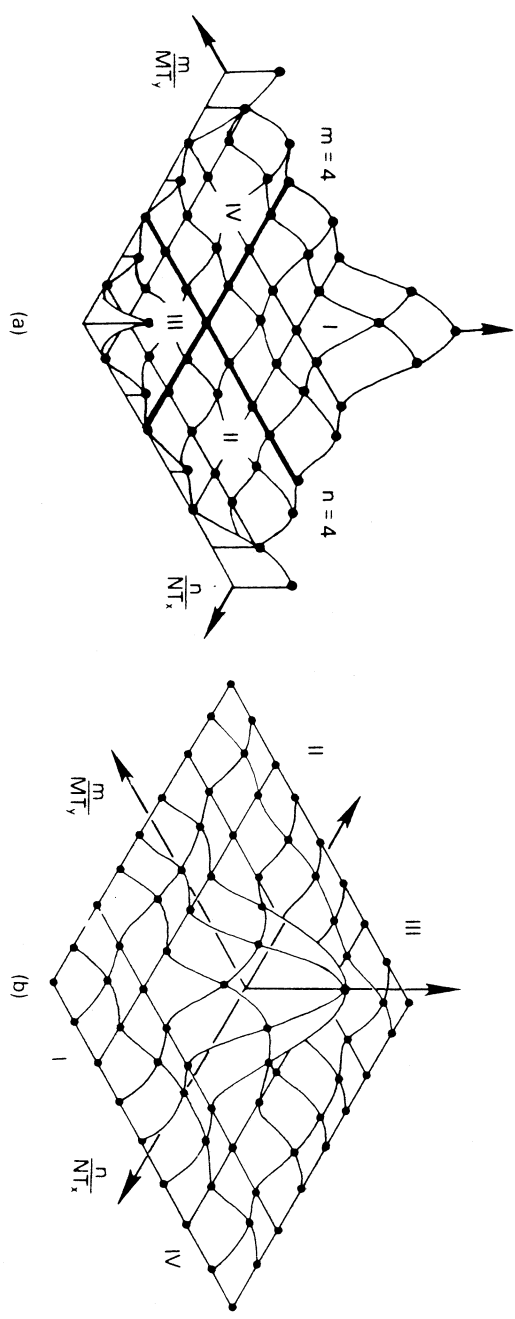


Figure 9.17 (continued)



(d)

Figure 11.5 Graphical presentation of two-dimensional FFT reorganization required for conventional viewing.